

HOMOTOPY ANALİZİ METODUNUN NÖTRON DİFÜZYONUNA UYGULANMASI

Şükran Çavdar*

Enerji Enstitüsü, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak, İstanbul, TR-34469

Topolojji ve diferansiyel geometrinin temellerinden biri olan homotopy kavramına dayanan Homotopy Analiz Metodu (HAM) 1992 yılında Shi Jun Liao tarafından ortaya konmuş ve o tarihten beri çeşitli çalışmalarla geliştirilmiştir. HAM cebirsel, lineer/non-lineer, adi/kısmi diferansiyel ve diferansiyel-integral denklemlere uygulanabilen ve seri çözümler sunan analitik, özyineli bir yöntemdir. Yöntemin güçlü yanları, elde edilen çözüm serisinin yakınsama hızının ve bölgesinin kontrol edilebilmesi ve başlangıç varsayımlarının seçimindeki serbestidir.

Yaygın olarak kullanılan, fakat çözümün uzun, hataya fazlasıyla açık ve çoğu zaman eldeki problemi çözmekte yetersiz kalan analitik yöntemler ve güçlü, ya karmaşık matematiksel temelleri ya da doğası nedeniyle güçlü bilgisayarlar ve derinlikli programlama bilgisi gerektiren sayısal yöntemler yerine, nötron difüzyon denkleminin çözümünde kolay uygulanabilir ve kabul edilebilir kesinlikte sonuçlar veren yöntemlerin uygulanıp uygulanamayacağı sorusuyla yola çıkan bir dizi çalışmanın parçası olan bu çalışmada, HAM sabit kaynak nötron difüzyon denkleminde uygulanmıştır. Ele alınan problemin ve sınır koşullarının doğasından ötürü başlangıç yaklaşımında taban fonksiyonları olarak Fourier tabanları kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar yaygın olarak kullanılan Değişkenlere Ayırma Yöntemi ve Adomian Ayırıştırma Yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Homotopy Analizi Yöntemi, HAM, Sabit Kaynaklı Nötron Difüzyon Denklemi

* E-posta: cavdar@itu.edu.tr

HOMOTOPY ANALYSIS METHOD FOR NEUTRON DIFFUSION CALCULATIONS

The Homotopy Analysis Method (HAM), proposed in 1992 by Shi Jun Liao and has been developed since then, is based on a fundamental concept in differential geometry and topology, the homotopy. It has proved useful for problems involving algebraic, linear/non-linear, ordinary/partial differential and differential-integral equations being an analytic, recursive method that provides a series sum solution. It has the advantage of offering a certain freedom for the choice of its arguments such as the initial guess, the auxiliary linear operator and the convergence control parameter, and it allows us to effectively control the rate and region of convergence of the series solution.

HAM is applied for the fixed source neutron diffusion equation in this work, which is a part of our research motivated by the question of whether methods for solving the neutron diffusion equation that yield straightforward expressions but able to provide a solution of reasonable accuracy exist such that we could avoid analytic methods that are widely used but either fail to solve the problem or provide solutions through many intricate expressions that are likely to contain mistakes or numerical methods that require powerful computational resources and advanced programming skills due to their very nature or intricate mathematical fundamentals. Fourier basis are employed for expressing the initial guess due to the structure of the problem and its boundary conditions. We present the results in comparison with other widely used methods of Adomian Decomposition and Variable Separation.

Keywords: Homotopy Analysis Method, HAM, Fixed Source Neutron Diffusion Equation

1. GİRİŞ

HAM 1992 yılında Liao tarafından ortaya konmuş, seri çözümler sunan analitik bir yöntemdir [1]. Bu tarihten beri Liao ve başka pek çok araştırmacı tarafından çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında, lineer ve nonlinear denklemlere başarıyla uygulanmıştır ([2-23] referanslarında bazı örnekleri sunulmuştur). Yöntemin temel farklılığı ve güçlü yanı ele alınan problemin çözüm serisinin yakınsaklık hızının ve bölgesinin, yakınsaklık kontrol parametresi h (the convergence control parameters) ile kontrol edilebilir olmasıdır. Bu nedenle HAM herhangi bir kabul ya da kısıtlama olmaksızın lineer ve nonlinear problemlere uygulanabilmektedir [24].

Yöntemin bir diğer güçlü yanı, probleme uygun taban fonksiyonlarının seçiminde, başlangıç varsayımının (initial guess), yardımcı lineer operatörün (auxiliary linear operator) ve yakınsaklık kontrol parametresinin seçiminde geniş bir seçim özgürlüğüne sahip olunmasıdır. Ancak bu rastgele bir seçim yapılabileceği anlamına da gelmemektedir. Çözülmesi istenen problemin tipi ve sınır koşulları, bu serbestinin sınırlarını belirlemektedir. Bu konuda detaylı iki çalışma [24] ve [25] referanslarında bulunabilir.

Bu çalışmada HAM sabit kaynak nötron difüzyon denkleminde uygulanmıştır. İkinci bölümde yöntemin temel tanımlarından, üçüncü bölümde yöntemin nötron difüzyonuna uygulanmasından ve dördüncü bölümde karşılaştırmalı sonuçlardan söz edilmektedir. Son bölüm ise bu çalışmadan elde edilen sonuçların değerlendirilmesine ayrılmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR

Homotopy Analizi Metodu'nda, N lineer ya da nonlinear operatör, \bar{x} bağımsız değişkenler vektörü, $g(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(\bar{x})$ çözüm fonksiyonu olmak üzere,

$$N_i[u_i(\bar{x})] = g_i(\bar{x}), \quad i = 1, \dots, l \quad (1)$$

biçiminde jenerik bir denklem sistemi ele alınır [25]. Yöntemin uygulanmasına, çözümü aranan $u(\bar{x})$ fonksiyonunun, bilinmeyen bir $\theta(\bar{x}; q)$ fonksiyonu ile sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin (zero-order deformation equation) oluşturulmasıyla başlanır. $\theta(\bar{x}; q)$ için sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi oluşturulursa

$$(1-q)\mathcal{L}[\theta_i(\bar{x}; q) - u_{i,0}(\bar{x})] = q\hbar\{N[\theta_i(\bar{x}; q)] - g_i(\bar{x})\} \quad (2)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. (Eş.2)'deki sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminde, $q \in [0,1]$ gömülü parametre (embedding parameter), \hbar sıfırdan farklı yakınsaklık kontrol parametresi (non-zero auxiliary parameter ya da convergence control parameter), \mathcal{L} yardımcı lineer operatördür (auxiliary linear operator). $u_{i,0}(\bar{x})$, denklemin başlangıç koşulu olmayıp $u(\bar{x})$ çözümünün başlangıç varsayımıdır (initial guess).

$q=0$ iken sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[\theta_i(\bar{x};0) - u_{i,0}(\bar{x})] = 0 \Rightarrow \theta_i(\bar{x};0) = u_{i,0}(\bar{x}) \quad (3)$$

eşitliğine dönüşür. Bu eşitlikten, $u_{i,0}(\bar{x})$ 'ın, denklemin başlangıç koşulundan farklı bir kavram olduğunu görmek mümkündür.

$q=1$ iken ise sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi

$$N[\theta_i(\bar{x};1)] = g_i(\bar{x}) \Rightarrow \theta_i(\bar{x};1) = u_i(\bar{x}) \quad (4)$$

eşitliğine dönüşür. Elde edilen (Eş.3) ve (Eş.4) sonuçları, q parametresinin 0'dan 1'e kadar değiştirilmesiyle (ya da deformasyonuyla) çözümün $u_{i,0}(\bar{x})$ 'dan $u_i(\bar{x})$ 'ye değişeceğini, dolayısıyla HAM'a göre çözümün elde edilebilmesi için $\theta_i(\bar{x};q)$ 'nin bulunmasının gerektiğini göstermektedir.

$\theta_i(\bar{x};q)$ 'nin $q=0$ 'dan $q=1$ 'e kadar olan sözkonusu deformasyonu tümüyle sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminden elde edilebilmektedir. Bunun için önce $\theta_i(\bar{x};q)$, q 'ya göre Taylor serisine açılır. Taylor seri açılımı yapıldığında

$$\theta_i(\bar{x};q) = u_{i,0}(\bar{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,i}(\bar{x})q^m, \quad u_{m,i}(\bar{x}) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \theta_i(\bar{x};q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (5)$$

biçimindeki homotopy serisi elde edilecektir. Eğer $u_{i,0}(\bar{x})$, \hbar ve \mathcal{L} uygun seçilirse $q=1$ için bu seri yakınsayacaktır [24, 25].

$$\theta_i(\bar{x};1) = u_{i,0}(\bar{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,i}(\bar{x}) \quad (6)$$

Liao'nun yönteminin detaylarını sunduğu kitabında [24] ispatladığı gibi, elde edilen bu seri, bu denklemin çözümlerinden biri olmak zorundadır. Bu durumda, ele alınan (Eş.1) denkleminin seri çözümünü elde etmek için (Eş.6)'daki $u_{i,m}(\bar{x})$ elemanlarını bulmak yeterli olacaktır.

HAM'a göre $u_{i,m}(\bar{x})$ elemanları m .dereceden deformasyon denklemi yardımıyla elde edilmektedir. Yöntemin aynı zamanda özyineleme bağıntısı olan m .dereceden deformasyon denklemi (Eş.2) denkleminin m defa türevi alınarak elde edilmektedir. Buna göre, sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa türevi alınırsa, m .dereceden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[u_{i,m}(\bar{x}) - \chi_m u_{i,m-1}(\bar{x})] = \hbar R_i(\bar{u}_{i,m-1}) \quad (7)$$

biçiminde olmaktadır. Bu denklemde, R_i ve χ_m büyüklükleri sırasıyla

$$R_i(\bar{u}_{i,m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \{N_i[\theta_i(\bar{x}; q)] - g_i(\bar{x})\}}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (8)$$

biçiminde ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (9)$$

biçiminde ifade edilmektedirler.

(Eş.7)'deki özyineleme bağıntısı kullanılarak denklemin çözüm serisinin $u_{i,m}(\bar{x})$ elemanları ve dolayısıyla çözüm serisi elde edilebilmektedir.

3. NÖTRON DİFÜZYONUNA UYGULAMA

Nötron Difüzyon Denklemi boşluk sınır koşullarının geçerli olduğu genel bir geometri için yazılacak olursa,

$$\nabla^2 \phi(\bar{r}) - \kappa^2 \phi(\bar{r}) = -\frac{S}{D}, \quad \bar{r} \in V, \phi(\bar{r}) = 0, \bar{r} \in S \quad (10)$$

biçimindedir. Denklemden $\phi(\bar{r})$ nötron akısını ve S nötron kaynağını ifade etmektedir. κ ise Σ_r

çıkartma tesir kesiti ve D difüzyon sabiti olmak üzere, $\kappa^2 = \frac{\Sigma_r}{D}$ biçiminde elde edilmektedir.

Bu çalışmada a uzunluğunda, iki boyutlu ve sabit nötron kaynaklı kare bir sistem ele alınmıştır. Sistem simetrisinden dolayı, HAM sistemin $\frac{1}{4}$ 'üne uygulanacaktır. Bu durumda (Eş.10) denklemi ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} - \kappa^2 \phi(x, y) &= -\frac{S}{D} \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} &= 0 \quad \text{at } x=0 \quad \phi(x, y) = 0 \quad \text{at } x=a \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} &= 0 \quad \text{at } y=0 \quad \phi(x, y) = 0 \quad \text{at } y=a \end{aligned} \quad (11)$$

biçimini alacaktır. Bu denklem (Eş.1) denklemi gibi operatörler cinsinden yazılacak olursa

$$N[\phi(x, y)] = -\frac{S}{D} \quad (12)$$

ve bu durumda N operatörü

$$N = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \kappa^2 \quad (13)$$

olacaktır. Buna göre, sabit kaynaklı nötron difüzyon denkleminin sıfırncı derece defromasyon denklemi

$$(1-q)\mathcal{L}[\theta(x, y; q) - \phi_o(x, y)] = q\hbar \left\{ N[\theta(x, y; q)] - \frac{S}{D} \right\} \quad (14)$$

biçiminde oluşturulacaktır.

(Eş.14)'e göre, öncelikle $\phi_o(x, y)$ başlangıç varsayımının ve \mathcal{L} yardımcı lineer operatörün belirlenmesinin gerektiği görülmektedir. Sabit kaynaklı nötron difüzyon denkleminin tipi ve sahip olduğu sınır koşullarından ötürü bu çalışmada başlangıç varsayımının (initial guess)

$$\phi_o(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{Cos}(\beta_n y) \quad (15)$$

biçiminde olduğu kabul edilmiştir. Uygunluk açısından, denklemin sağ tarafındaki bilinen kuvvet terimi de aynı tabanlara açılmıştır:

$$\frac{S}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \text{Cos}(\beta_n y) \quad (16)$$

Fourier tabanlarının ortogonalitesinden yararlanarak s_n

$$s_n = \frac{(-1)^n 2S}{aD\beta_n}$$

biçiminde bulunur.

(Eş.15)'deki varsayımın denklemin sınır koşullarını sağlaması gerekmektedir. Bu nedenle $y = a$ 'daki sınır koşulunun sağlanabilmesi için β_n büyüklüğünün değerinin

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a} \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

biçiminde olması gerekmektedir.

HAM'ın uygulanışı esnasında başlangıç varsayımı dışında, yardımcı lineer operatörün de uygun biçimde seçilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada yardımcı lineer operatör, (Eş.13) denklemindeki

operatörün kendisi seçilmiştir:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \kappa^2 \quad (18)$$

HAM'da özyineleme bağıntısının bulunması için, sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa türevinin alınması gerekiyordu. Buna göre (Eş.14)'ün m defa türevi alınır;

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\phi_m(x, y) - \chi_m \phi_{m-1}(x, y)] &= \hbar R_m(\bar{u}_{m-1}) \Rightarrow \\ \phi_m(x, y) &= \mathfrak{L}^{-1}[\hbar R_m(\bar{u}_{m-1})] + \chi_m \phi_{m-1}(x, y) \quad m > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. Denklemdaki R_m terimi ise (Eş.8), (Eş.13) ve (Eş.16) denklemleri kullanılarak

$$R_m = \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, y)}{\partial y^2} - \kappa^2 \phi_{m-1}(x, y) + (1 - \chi_m) \sum_{n=0}^{\infty} s_n \text{Cos} \beta_n y \quad (20)$$

biçiminde ifade edilir. (Eş.19)'daki özyineleme bağıntısı ve (Eş.20) eşitliği yardımıyla MATLAB, Mathematica gibi sembolik progamlama uygulamaları kullanılarak kolaylıkla seri elemanlarını hesaplamak olanaklıdır. Seri elemanlarından ilk birkaçı biraraya getirilirse

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{Cos} \beta_n y \left(1 + h^2 \frac{(\alpha_n x)^2}{2!} + h^4 \frac{(\alpha_n x)^4}{4!} + \dots \right) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} s_n \text{Cos} \beta_n y \left(h^2 \frac{x^2}{2!} + h^4 \frac{\alpha_n^2 x^4}{4!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (21)$$

eşitliği elde edilecektir. Genel kabule uygun olarak ve Adomian Ayrıklaştırma Yöntemi sonuçları ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla bu çalışmada $h = -1$ alınmıştır. Bu durumda (Eş. 21);

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{Cos} \beta_n y \left(1 + \frac{(\alpha_n x)^2}{2!} + \frac{(\alpha_n x)^4}{4!} \dots \right) - \sum_{n=0}^{\infty} s_n \text{Cos} \beta_n y \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha_n^2 x^4}{4!} \dots \right) \quad (22)$$

Eşitliğine dönüşecektir. (Eş.22)'de görülebileceği gibi, bu çalışmada ele alınan denklem açısından sembolik bir uygulama kullanmadan da, ilk iki-üç terimin elle bile hesaplanmasından sonra serinin kapalı formuna kolaylıkla ulaşılabilmektedir:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{Cos} \beta_n y \text{Cosh}(\alpha_n x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\alpha_n^2} \text{Cos} \beta_n y [\text{Cosh}(\alpha_n x) - 1] \quad (23)$$

$x = a$ için $\phi(a, y) = 0$ sınır koşulu geçerlidir. Bu sınır koşulu uygulanarak (Eş.23)'teki b_n terimi bulunur. Buna göre (Eş.23)'e sınır koşulu uygulanırsa;

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \beta_n y \cosh(\alpha_n a) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\alpha_n^2} \cos \beta_n y [\cosh(\alpha_n a) - 1] = 0 \quad (24)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{s_n}{\alpha_n^2} \frac{\cosh(\alpha_n a) - 1}{\cosh(\alpha_n a)} = \frac{(-1)^n 2S}{Da \alpha_n^2 \beta_n} \frac{\cosh(\alpha_n a) - 1}{\cosh(\alpha_n a)}$$

elde edilir. Bu sonuç tekrar (Eş.23)'de yerine konursa (Eş.11) denkleminin çözümü elde edilir:

$$\phi(x, y) = \frac{2S}{Da} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^2 \beta_n} \cos \beta_n y \left[1 - \frac{\cosh(\alpha_n x)}{\cosh(\alpha_n a)} \right] \quad (25)$$

Elde edilen bu sonuç Adomian Ayırıklaştırma Yöntemi ile elde edilen sonuç ile aynıdır [26]. Yine (Eş.11) denklemi Değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümlerse elde edilen çözüm ifadesi

$$\phi_{DA}(x, y) = -\frac{2S}{Da} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n \alpha_n^2} \frac{\cosh(\alpha_n x)}{\cosh(\alpha_n a)} \cos(\beta_n y) + \frac{S}{D\kappa^2} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa a)} \right] \quad (26)$$

biçimindedir.

3. UYGULAMALAR

Bu uygulamada, $2a=50\text{cm}$ olan kare biçiminde reaktör kalbinin simetriden dolayı $1/4$ 'lük kısmı ele alınmıştır. (Eş.11)'de ifade edildiği gibi üst ve sol kenarlarda boşluk sınır koşulu; sağ ve alt kenarlarda yansıtıcı sınır koşulu uygulanmıştır. Sistem sabitleri Çizelge 1.'de sunulmuştur.

Çizelge 1. Sistem sabitleri

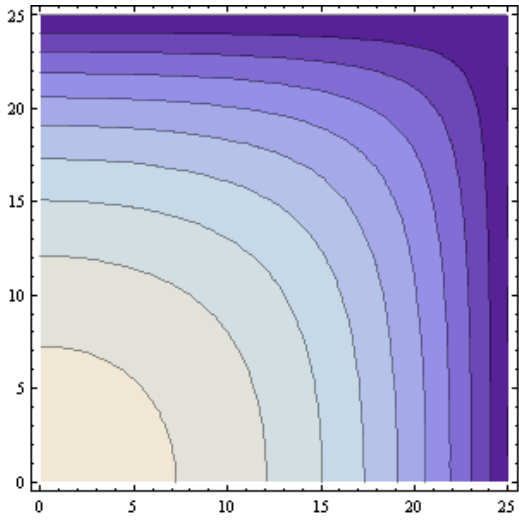
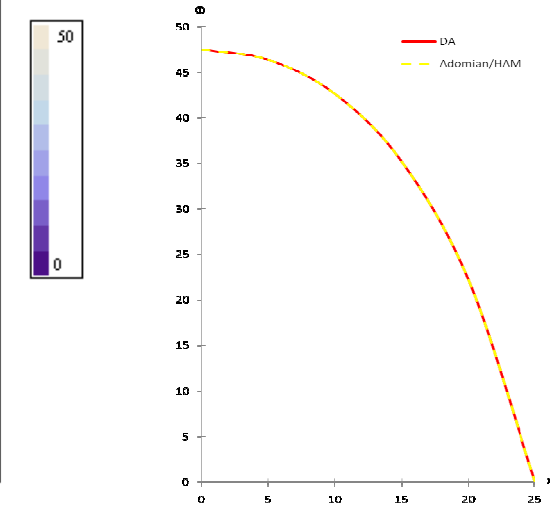
Sabit	Değer
A (cm)	25
D (cm)	1,77764
Σ_a (cm ⁻¹)	1
S	1

Bu uygulamada, Değişkenlere Ayırma yöntemi kullanılarak elde edilen sonucun 10^{-7} 'lik duyarlılığı ilk $M=356$ eleman toplamında sağladığı görülmüştür. Bu nedenle $M=356$ ile elde edilen sonuç tam çözüm olarak kabul edilmiştir. MATHEMATICA kullanılarak yapılan hesaplamalarda HAM ile elde edilen sonucun da aynı duyarlılığı $M=356$ için sağladığı görülmüştür.

Ayrıca, uygulamada elde edilen Değişkenlere Ayırma (DA) ve HAM sonuçları Adomian Ayırıklaştırma Yöntemi (Adomian Decomposition Method, ADM) ile elde edilen sonuçlar [26] ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 2. ve Şekil 2.'de, $M=356$ ve 25×25 'lik grid için HAM sonuçları Şekil 1.'de sunulmuştur.

Çizelge 2. $y=0$ için elde edilen sonuçlar

x (cm)	HAM	ADM	DA	Hata($\times 10^{-9}$)
0,0	47,47293	47,47293	47,47293	5
5,0	46,32885	46,32885	46,32885	5
10,0	42,57155	42,57155	42,57155	6
15,0	35,15265	35,15265	35,15265	7
20,0	22,07556	22,07556	22,07556	1,1
25,0	0,00000	0,00000	0,00000	0

Şekil 1. $M=356$ ve 25×25 'lik grid için HAM çözümüŞekil 2. $y=0$ için ADM, HAM ve DA çözümleri

4. TARTIŞMA VE YORUM

Bu çalışmada Homotopy Analizi Metodu, sabit kaynaklı nötron difüzyon denkleminde uygulanmıştır. Yapılan hesaplamalar sonucunda, Homotopy Analizi Metodu'nun, Analitik çözüm yöntemi olarak yaygın biçimde kullanılan değişkenlere ayırma yöntemine göre daha kısa ve kolay işlemlerle yapılan bir çözüm yöntemi olduğu hem de yüksek duyarlılıkla aynı hızla yakınsadığı gözlenmiştir. Ayrıca, Homotopy Analizi Metodu $h = -1$ için Adomian Ayırıklaştırma Yöntemi ile aynı sonucu vermiştir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Liao, S.J., The Proposed Homotopy Analysis Techniques for the Solution of Nonlinear Problems, PhD Dissertation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 1992 (in English).
- [2] Liao, S.J., An Approximate Solution Technique not Depending on Small Parameters: a Special Example, International Journal of Non-Linear Mechanics, 30, 3, 371-380, 1995
- [3] Liao, S.J., What's the Common Ground of All Numerical and Analytical Techniques for Nonlinear Problems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1, 4, 26-30, 1996
- [4] Liao, S.J., Homotopy Analysis Method: A New Analytical Technique for Nonlinear Problems, Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2, 2, 95-100, 1997
- [5] Liao, S.J., General Boundary Element Method: an Application of Homotopy Analysis Method, Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 3, 3, 159-163, 1998
- [6] Liao, S.J., A Direct Boundary Element Approach for Unsteady Non-Linear Heat Transfer Problems,

- Engineering Analysis with Boundary Elements, 26, 55-59, 2002
- [7] Liao, S.J., On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems, Applied Mathematics and Computation, 147, 499-513, 2004
- [8] İnç, M., On Exact Solution of Laplace Equation with Dirichlet and Neumann Boundary Conditions by the Homotopy Analysis Method, Physics Letters A, 365, 412-415, 2007
- [9] Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T., An Efficient Algorithm for Solving Fifth-Order Boundary Value Problems, Mathematical and Computer Modelling, 45, 954-964, 2007
- [10] Wang, Z., Zoub, L., Zhang, H., Applying Homotopy Analysis Method for Solving Differential-Difference Equation, Physics Letters A, 369, 77-84, 2007
- [11] Bataineh A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Approximate Analytical Solutions of Systems of PDEs by Homotopy Analysis Method, Computers and Mathematics with Applications, 55, 2913-2923, 2008
- [12] Bataineh A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Approximate Solutions of Singular Two-Point BVPs by Modified Homotopy Analysis Method, Physics Letter A, 371, 4062-4066, 2008
- [13] Bataineh A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Solving Systems of ODEs by Homotopy Analysis Method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13, 2060-2070, 2008
- [14] Liao, S.J., Notes on the Homotopy Analysis Method: Some Definitions and Theorems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 983-997, 2009
- [15] Alomari, A.K., Noorani, M.S.M., Nazar, R., On the Homotopy Analysis Method for the Exact Solutions of Helmholtz Equation, Chaos Solitons and Fractals, 41, 4, 1873-1879, 2009
- [16] Jafari, H., Seifi, S., Homotopy Analysis Method for Solving Linear and Nonlinear Fractional Diffusion-Wave Equation, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 2006-2012, 2009
- [17] Bataineh A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., On a New Reliable Modification of Homotopy Analysis Method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 409-423, 2009
- [18] Singh, Om P., Pandey, R.K., Singh, V. K., An Analytic Algorithm of Lane-Emden Type Equations Arising in Astrophysics Using Modified Homotopy Analysis Method, Computer Physics Communications, 180, 1116-1124, 2009
- [19] Bataineh A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Homotopy Analysis Method for Singular IVPs of Emden-Fowler Type, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 1121-1131, 2009
- [20] Abbasbandy, S., Babolian, E., Ashtiani, M., Numerical Solution of the Generalized Zakharov Equation by Homotopy Analysis Method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 4114-4121, 2009
- [21] Rashidi, M.M., Dinarvand, S., Purely Analytic Approximate Solutions for Steady Three-Dimensional Problem of Condensation film on Inclined Rotating disk by Homotopy Analysis Method, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10, 2346-2356, 2009
- [22] Song, L., Zhang, H., Solving the fractional BBM-Burgers Equation Using the Homotopy Analysis Method, Chaos Solitons and Fractals, 40, 1616-1622, 2009
- [23] Liao, S.J., On the Relationship Between The Homotopy Analysis Method and Euler Transform, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Article In Press, 2009
- [24] Liao, S.J., Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, CRC Press, Boca Raton, Chapman and Hall, 2003.
- [25] Van Gorder, R.A., Vajravelu, K., On the Selection of Auxiliary Functions, Operators, and Convergence Control Parameters in the Application of the Homotopy Analysis Method to Nonlinear Differential Equations: A general approach, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 4078-4089, 2009
- [26] Çavdar, Ş., Ahmetolan, S., Üney, M., Adomian Decomposition Method For Neutron Diffusion Calculations, The Fifth Eurasian Conference on Nuclear Science and its Application, October 2008, Ankara, Turkey.