

12

# Hızlandırıcıyla Sürümlü Sistemlerde Çoğaltma Katsayılarının Homotopy Pertürbasyon Metodu ile Bulunması

**Şükran ÇAVDAR, Ali GÖKSU**

İstanbul Teknik Üniversitesi, Enerji Enstitüsü, Nükleer Araştırmalar ABD

IV. Ulusal Parçacık Hızlandırıcıları ve Uygulamaları Kongresi  
30 Ağustos - 1 Eylül 2010, Bodrum, Türkiye

- Hızlandırıcı Sürümlü Sistemler (ADS)
- Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)
- Problem Formülasyonu
- Problemin Çözümü
- Çoğaltma Katsayılarının Bulunması
- Sonuçlar ve Tartışma

# 1

## Hızlandırıcı Sürümlü Sistemler

- Çift amaçlı sistemler olup
  - Günümüz reaktörlerinden çıkan nükleer atığın yakılması (*insinerasyon*) ve dönüştürülmesi (*tranmutasyon*)
  - Güç üretimibirlikte hedeflenmektedir.
- Üç bileşenden;
  - Hızlandırıcı
  - Spallasyon kaynağı
  - Kritikaltı kalpoluşan sistemlerdir.
- Alt kritik reaktörlerle çalışıldığından güvenlik avantajına sahip sistemlerdir.
- Güç, hem kaynak şiddeti hem de kritikliğin kontrolü ile ayrı ayrı denetlenebilmektedir.

## 2

## Homotopi Pertürbasyon Metodu-1

Homotopy Pertürbasyon Metodu'nun ele aldığı problemler

$$A[u(\vec{r})] - f(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Omega \quad \text{1}$$

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma$$

$$A = L + N$$

biçiminde genelleştirilebilir. Bu problem için  $H : R \times [0, 1] \rightarrow R$  olmak üzere Homotopi

$$H(v; p) = (1 - p)\{L[v(\vec{r}; p)] - L[u_0(\vec{r})]\} + p\{A[v(\vec{r}; p)] - f(\vec{r})\} = 0 \quad \text{2}$$

olarak kurulabilir.

$$p = 0 \Rightarrow L[v(\vec{r}; 0)] - L[u_0(\vec{r})] = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow A[v(\vec{r}; 1)] - f(\vec{r}) = 0 \quad \text{3}$$

$$v(\vec{r}; p) \in R$$

bilinmeyen fonksiyon

## 3

## Homotopi Pertürbasyon Metodu-2

$p$  parametresi  $[0,1]$  aralığında olduğundan küçük parametre sayılabilir ve pertürbasyon açılımı uygulanabilir. Buna dayanarak Homotopi Pertürbasyon Metodu 2 denkleminin çözümünün

$$v(\vec{r}; p) = p^0 v_0(\vec{r}; p) + p^1 v_1(\vec{r}; p) + p^2 v_2(\vec{r}; p) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(\vec{r}; p) \quad 4$$

biçiminde olduğunu varsayar. Buna göre 3 denkleminin çözümü  $p=1$  için 1 denkleminin yaklaşık çözümünü vermektedir.

$$u(\vec{r}) = \lim_{p \rightarrow 1} v(\vec{r}; p) = \lim_{p \rightarrow 1} (p^0 v_0(\vec{r}; p) + p^1 v_1(\vec{r}; p) + p^2 v_2(\vec{r}; p) + \dots)$$

$$u(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\vec{r})$$

## 4

## Homotopi Pertürbasyon Metodu-3

Yöntemin uygulanışı sırasında 4 bağıntısı 2 denkleminde yerine konmakta ve p katsayıları aynı olan terimler ayrı ayrı toplanmaktadır.

$$H(v; p) = (1 - p) \{L[v_0(\vec{r}; p) + p^1 v_1(\vec{r}; p) + \dots] - L[u_0(\vec{r})]\} + p \{A[v_0(\vec{r}; p) + p^1 v_1(\vec{r}; p) + \dots] - f(\vec{r})\} = 0$$

$$p^0 : L[v_0(\vec{r}; p)] - L[u_0(\vec{r})] = 0$$

$$p^1 : L[v_1(\vec{r}; p)] - L[v_0(\vec{r}; p)] - L[v_0(\vec{r}; p)] + A[v_0(\vec{r}; p)] - pf(\vec{r}) = 0$$

$$p^2 : L[v_2(\vec{r}; p)] - L[v_1(\vec{r}; p)] - L[v_1(\vec{r}; p)] + A[v_1(\vec{r}; p)] = 0$$

⋮

$$u(\vec{r}) = \lim_{p \rightarrow 1} v(\vec{r}; p) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(\vec{r}; p) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\vec{r})$$

Başlangıç varsayımı  $u_0$  yardımıyla  $v_0$  ve ardından tek tek  $v_1$ ,  $v_2$  hesaplanabilir. Böylece serinin elemanları bulunmuş olur.

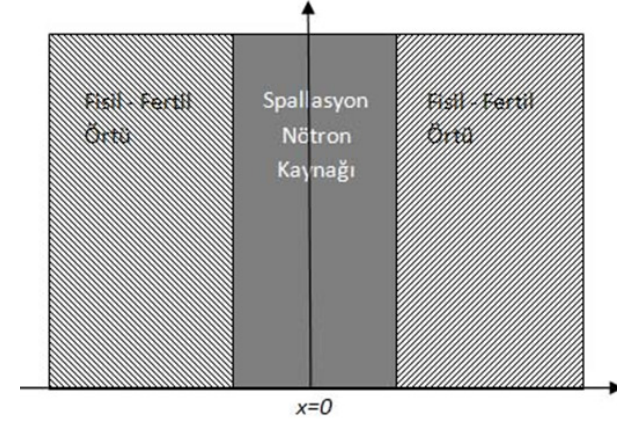
## 5

# Problem Formülasyonu-1

Spallasyon kaynağı bölgesini ifade eden denklemler

$$\frac{d^2 \phi_1^s(x)}{dx^2} - \kappa_{1s}^2 \phi_1^s(x) = -\frac{q(x)}{D_1^s} \quad 5$$

$$\frac{d^2 \phi_2^s(x)}{dx^2} - \kappa_{2s}^2 \phi_2^s(x) = -\frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s \phi_1^s(x)}{D_2^s}$$



Spallasyon kaynağı bölgesinde geçerli olan ek akı denklemleri

$$\frac{d^2 \psi_1^s(x)}{dx^2} - \kappa_{1s}^2 \psi_1^s(x) = -\frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s \psi_2^s(x)}{D_1^s}$$

$$\frac{d^2 \psi_2^s(x)}{dx^2} - \kappa_{2s}^2 \psi_2^s(x) = 0 \quad 6$$

$$k_q = \frac{\int_0^a \psi_1^s(x) q_0(x) dx}{\int_0^a q_0(x) dx}$$

## 6

## Problem Formülasyonu-2

Fisil/Fertil örtü bölgesini modelleyen denklemler

$$\frac{d^2 \phi_1^f(x)}{dx^2} - \kappa_{1f}^2 \phi_1^f(x) = -\frac{v \Sigma_{f2}^f}{D_1^f k} \phi_2^f(x)$$

7

$$\frac{d^2 \phi_2^f(x)}{dx^2} - \kappa_{2f}^2 \phi_2^f(x) = -\frac{\Sigma_{s2 \leftarrow 1}^f}{D_2^f} \phi_1^f(x)$$

Ek akı denklemleri

$$\frac{d^2 \psi_1^f(x)}{dx^2} - \kappa_{1f}^2 \psi_1^f(x) = -\frac{\Sigma_{s2 \leftarrow 1}^f}{D_1^f} \psi_2^f(x)$$

8

$$\frac{d^2 \psi_2^f(x)}{dx^2} - \kappa_{2f}^2 \psi_2^f(x) = -\frac{v \Sigma_{f2}^f}{D_2^f} \psi_1^f(x)$$

$$k_s = \frac{\int_a^b \psi_1^f(x) v \Sigma_{f2}^f \phi_2^s(x) dx}{\int_a^b v \Sigma_{f2}^f \phi_2^s(x) dx}$$



## 7

## Kaynak Bölgesine HPM Uygulama

Hızlı grup akısı çözümü için 2 denkleminde verilen homotopi kurulduktan sonra 4 bağıntısı bu denkleminde yerine konur:

$$\frac{d^2 v_1^s}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_{10}^s}{dx^2} + p \frac{d^2 \phi_{10}^s}{dx^2} - p \kappa_{1s}^2 v_1^s + p \frac{S}{D_1^s} = 0$$

$$\phi_{10}(x) = A_1^s x + B_1^s$$

$$x = 0 \text{ da } \frac{d\phi_{10}(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \phi_{10}(x) = B_1^s$$

$$p^0 : \frac{d^2 v_{10}^s(x)}{dx^2} = 0$$

$$v_{10}^s(x; p) = B_1^s$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} - \kappa_{1s}^2$$

$$p^1 : \frac{d^2 v_{11}^s(x)}{dx^2} - \kappa_{1s}^2 v_{10}^s(x) + \frac{S}{D_1^s} = 0$$

$$v_{11}^s(x; p) = p^0 \left( B_1^s \kappa_{1s}^2 \frac{x^2}{2!} - \frac{S}{D_1^s} \frac{x^2}{2!} \right)$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$p^2 : \frac{d^2 v_{12}^s(x, y)}{dx^2} - \kappa_{1s}^2 v_{11}^s(x) = 0$$

$$v_{12}^s(x; p) = p^2 \left( B_1^s \kappa_{1s}^4 \frac{x^4}{4!} - \frac{S}{D_1^s} \kappa_{1s}^2 \frac{x^4}{4!} \right)$$

⋮

⋮

Elde edilen seri elemanları toplanarak akı bulunur.

$$\phi_1^s(x) = \lim_{p \rightarrow 1} v_1 = B_1^s \text{Cosh}(\kappa_{1s} x) - \frac{S}{D \kappa_{1s}^2} [\text{Cosh}(\kappa_{1s} x) - 1]$$

## 8

## Kaynak Bölgesine HPM Uygulama

Termal grup akısı çözümü aynı adımlar uygulanır:

$$\frac{d^2 v_2^s}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_{20}^s}{dx^2} + p \frac{d^2 \phi_{20}^s}{dx^2} - p \kappa_{2s}^2 v_2^s + p \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s}{D_2^s} \phi_1^s = 0$$

$$\phi_{20}(x) = A_2^s x + B_2^s$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} - \kappa_{2s}^2$$

$$x = 0 \text{ da } \frac{\phi_{20}(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \phi_{20}(x) = B_2^s$$

$$p^0 : \frac{d^2 v_{20}^s(x)}{dx^2} = 0$$

$$v_{20}^s(x; p) = B_2^s$$

$$p^1 : \frac{d^2 v_{21}^s(x)}{dx^2} - \kappa_{1s}^2 v_{20}^s(x) + \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s}{D_2^s} \phi_1^s = 0$$

$$v_{21}^s(x; p) = p^0 \left( B_2^s \kappa_{2s}^2 \frac{x^2}{2!} - \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s}{D_2^s \kappa_{1s}^2} \left( B_1^s - \frac{S}{D_1^s \kappa_{1s}^2} \right) \text{Cosh}(\kappa_{1s} x) - \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s}{D_2^s} \frac{S}{D_1^s \kappa_{1s}^2} \frac{x^2}{2!} \right)$$

$$p^2 : \frac{d^2 v_{22}^s(x, y)}{dx^2} - \kappa_{2s}^2 v_{21}^s(x) = 0$$

$$v_{22}^s(x; p) = p^2 \left( B_2^s \kappa_{2s}^4 \frac{x^4}{4!} - \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s \kappa_{2s}^2}{D_2^s \kappa_{1s}^4} \left( B_1^s - \frac{S}{D_1^s \kappa_{1s}^2} \right) \text{Cosh}(\kappa_{1s} x) - \frac{\sum_{s2 \leftarrow 1}^s}{D_2^s} \frac{S \kappa_{2s}^2}{D_1^s \kappa_{1s}^2} \frac{x^4}{4!} \right)$$

⋮

⋮

Elde edilen seri elemanları toplanarak akı bulunur. Termal akı için kapalı bir form elde etmek olanaklı olmamaktadır. Ancak en az 6 seri elamanı alınarak tam çözüm elde edilmektedir.

## 9

## Kaynak Bölgesine HPM Uygulama

Akının hesaplanmasında izlenen yollar takip edilerek kaynak bölgesi ek akıları bulunur. Termal ek akı için kapalı form:

$$\psi_2^s(x) = E_2^s \text{Cosh}(\kappa_{2s}x)$$

Ancak, hızlı ek akı için kapalı bir form elde etmek olanaklı olmamaktadır. Az sayıdaki seri elemanı alınarak tam çözüm elde edilmektedir.

```

g := 0
For[g = 1, g ≤ 2, g++,
  h = g - 1;
  Toplam[x_, g] = 0;
  For[m = 2, m < 10, m++,
    l = m - 1;
    If[g ≤ 1,
      U[x_, g, m] = Integrate[Integrate[K[1]^2 * U[x, g, l], x], x];
      Toplam[x_, g] = Toplam[x, g] + U[x, g, m];
      U[x_, g, m] = Integrate[Integrate[K[2]^2 * U[x, g, l], x], x]
        - Integrate[Integrate[E_s[2] * U[x, h, l] / DS[2], x], x];
      Toplam[x_, g] = Toplam[x, g] + U[x, g, m];
    ];
  ];
];

```

## 10

## Fisil Bölgeye HPM Uygulama

Fisil/Fertil bölgede hem akıllar hem de ek akıllar için kuple denklemler sözkonusudur. Bu nedenle elde edilen seri çözümlerin kapalı formlarını elde etmek olanaklı olmamaktadır.

$$\frac{d^2}{dx^2}(v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) - \kappa_{1f}^2(v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) + p \frac{d^2 \phi_{10}^f}{dx^2} + \frac{v \Sigma_{f2}^f}{D_1^f k} (v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) - \kappa_{2f}^2(v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) + p \frac{d^2 \phi_{20}^f}{dx^2} + \frac{\Sigma_{s2 \leftarrow 1}^f}{D_2^f} (v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) - \kappa_{1f}^2(v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) + p \frac{d^2 \psi_{10}^f}{dx^2} + \frac{\Sigma_{s2 \leftarrow 1}^f}{D_1^f} (v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) - \kappa_{2f}^2(v_{20}^f + pv_{21}^f + \dots) + p \frac{d^2 \psi_{20}^f}{dx^2} + \frac{v \Sigma_{f2}^f}{D_2^f} (v_{10}^f + pv_{11}^f + \dots) = 0$$

$$\phi_{10}^f(x) = B_1^f$$

$$\phi_{20}^f(x) = B_2^f$$

$$\psi_{10}^f(x) = E_1^f$$

$$\psi_{20}^f(x) = E_2^f$$

# 11

## Sayısal Uygulama

Fisil örtü bölgesi için iki enerji grup sabitleri ( Kobayashi, 2000)

$^{235}\text{U}$ (%)	g	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{rg}$ (cm $^{-1}$ )	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm $^{-1}$ )	$\Sigma_{(s,2\leftarrow 1)}$ (cm $^{-1}$ )
2.7	1	1.2105	0.033338	0.0	0.0295616
2.7	2	0.21958	0.085579	0.11772	0.0

Spallasyon kaynağı bölgesi için iki enerji grup sabitleri

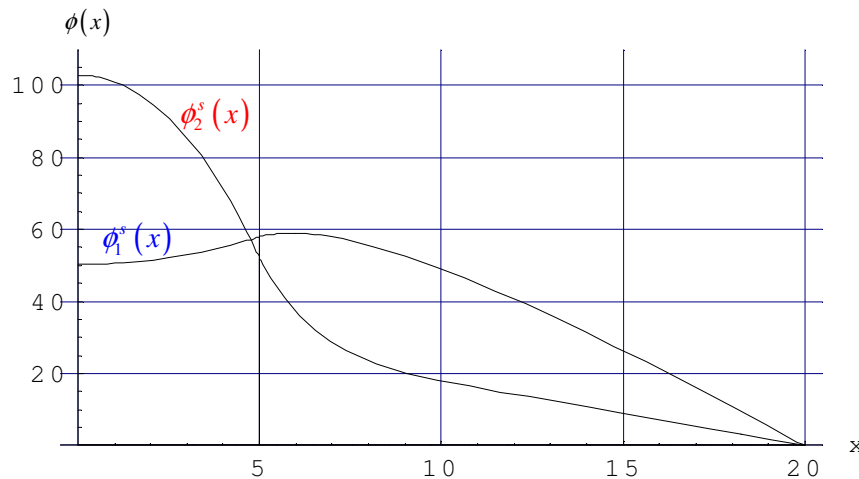
g	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{rg}$ (cm $^{-1}$ )	$\Sigma_{(s,2\leftarrow 1)}$ (cm $^{-1}$ )
1	0.8800	0.0300	0.0250
2	0.2000	0.00500	0.0

$$k_s = 0.83658$$

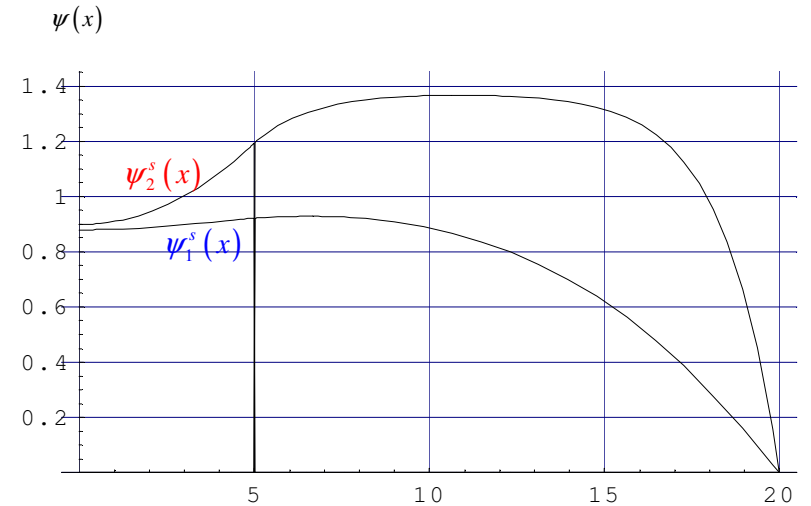
$$k_q = 0.895187$$

$$k_s = \frac{\int_a^b \psi_1^f(x) \nu \Sigma_{f2}^f \phi_2^s(x) dx}{\int_a^b \nu \Sigma_{f2}^f \phi_2^s(x) dx}$$

$$k_q = \frac{\int_0^a \psi_1^s(x) q_0(x) dx}{\int_0^a q_0(x) dx}$$



Hızlı ve Termal Akılar



Hızlı ve Termal Ek Akılar

- Tek gruplu ADS modeli problemine HPM uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar Green Function çözümleriyle tam olarak uyumluluk göstermiştir.
- Seri formu çözümlerinde yakınsaklık hızlı bir biçimde sağlanmıştır.
- Yöntem, bazı denklemler için manuel olarak bile çözüm üretmektedir. Bazı denklemler için ise MATHEMATICA, MATLAB gibi uygulamalarla kısa kodlarla çözüm üretilebilmektedir.
- Yöntemin karmaşık matematiksel yapısı olmadığından anlaşılması ve uygulanması oldukça kolaydır.
- HPM'nin bu çalışmadaki uygulamalarının tam sonuç vermesi, yöntemin, analitik çözümlerinin elde edilmesinde çeşitli zorluklarla karşılaşılan çok gruplu ve/veya çok bölgeli nötron difüzyon denklemlerine uygulanabileceği yolunda güçlü bir motivasyon oluşturmaktadır.

# Teşekkürler

**Şükran ÇAVDAR, Ali GÖKSU**

**İstanbul Teknik Üniversitesi, Enerji Enstitüsü, Nükleer Araştırmalar ABD**

IV. Ulusal Parçacık Hızlandırıcıları ve Uygulamaları Kongresi  
30 Ağustos - 1 Eylül 2010, Bodrum, Türkiye